NEFN 5

Nový nadpis 16.3.2010

- **Věta** $H^1(a,b) = W^{1,2}(a,b) \subset\subset C(\langle a,b\rangle)$

Důkaz se opírá o Arzela - Ascoliho větu:

- $M \subset C(\langle a,b\rangle)$
- $\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x,y \in \langle a,b\rangle\, \forall u \in M: |x-y| < \delta \Rightarrow |u(x)-u(y)| < \varepsilon$
- $\exists c > 0\, \forall u \in M: \|u\| \leq c$

(funkce z M jsou • stejně stejnoměrně spojité
• stejně omezené)

$\Downarrow$

M je relativně kompaktní
(tzn. $\overline{M}$ je kompaktní)

a o tzv. (derivativní) definici $H^1(a,b)$

$$H^1(a,b) = \{u \in AC(\langle a,b\rangle) : u' \in L^2(a,b)\}$$

$$\left(u \in AC(\langle a,b\rangle) \equiv u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt\right)$$

Buď $M \subset H^1(a,b)$, M omezená

$$\left(\text{tzn. } \exists c > 0\, \forall u \in M: \|u\|_1 = \sqrt{\int_a^b u^2 + \int_a^b (u')^2} \leq c\right)$$

Zřejmě $M \subset C(\langle a,b\rangle)$ a stačí dokázat stejnou stejnoměrnou spojitost a stejnou omezenost prvků M

- $\forall u \in M\ \forall x,y \in \langle a,b\rangle$:

$$|u(x)-u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)\,dt\right| \leq |x-y|^{1/2} \cdot \left|\int_y^x (u'(t))^2\,dt\right|^{1/2} \leq$$

$$\leq c \cdot |x-y|^{1/2} \Rightarrow$$ stejně stejnoměrná spojitost funkcí z M

- $$|u(x)| \leq |u(y)| + \left|\int_y^x u'(t)\,dt\right| \leq |u(y)| + (b-a)^{1/2} \cdot c$$

... integrujeme podle y přes (a,b) :

$$(b-a)|u(x)| \leq \int_a^b |u(y)| + c(b-a)^{3/2} \leq$$

$$\leq (b-a)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |u(y)|^2\,dy\right)^{1/2} + c(b-a)^{3/2} \leq$$

$$\leq k \cdot c \Rightarrow$$ stejná omezenost funkcí z M

cbd.